Ääriarvojakaumien luokittelun formalisointi

Affiinit reaaliakselin muunnokset

Joel Kronqvist

9. kesäkuuta 2026

Outline

Linkki kalvoihin

Kuva: Esityksen kalvot ovat saatavilla osoitteesta cron4.fi/aihe.pdf tai kuvan QR-koodin kautta.

Osio 1

Formalisointi

Mitä on matematiikan tietokoneformalisointi?

- Formaali kieli

```
variable (p q : Prop)

lemma (h : p ∧ q) : q ∧ p :=
  have hp : p := h.left
  have hq : q := h.right
  show q ∧ p from
    And.intro hq hp
```

Mitä on matematiikan tietokoneformalisointi?

- Formaali kieli
- Tyyppitarkistin

```
variable (p q : Prop)

lemma (h : p ∧ q) : q ∧ p :=
  have hp : p := h.left
  have hq : q := h.right
  show q ∧ p from
    And.intro hq hp
```

Mitä on matematiikan tietokoneformalisointi?

- Formaali kieli
- Tyyppitarkistin
- Tietokone vaatii jokaisen loogisen askeleen

```
variable (p q : Prop)

lemma (h : p ∧ q) : q ∧ p :=
  have hp : p := h.left
  have hq : q := h.right
  show q ∧ p from
    And.intro hq hp
```

Miksi?

Formalisoinnin hyötyjä:

- Tietokone vaatii jokaisen loogisen askeleen

Miksi?

Formalisoinnin hyötyjä:

- Tietokone vaatii jokaisen loogisen askeleen
- Helpompi tarkastettavuus

Miksi?

Formalisoinnin hyötyjä:

- Tietokone vaatii jokaisen loogisen askeleen
- Helpompi tarkastettavuus
- Huoleton automatisaatio

Esimerkki automatisaatiosta

Korollaarin 4.2 todistuksesta (Tuomas Kelomäki, 2025).
Oletus:

$$
\begin{aligned}
2 &> -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}q - 1 \\
2 &> 3n - \frac{3}{2}h + q - \frac{5}{2} \\
2 &> -\frac{9}{4}n + h - \frac{3}{4}q - \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Väite: $n < 39$.

Esimerkki automatisaatiosta

```
import Mathlib.Analysis.Normed.Field.Lemmas

def tA (n : ℚ) (h q : ℚ) : ℚ :=
  (-1/2) * n + 1/2 * h - 1/4 * q - 1

def tB (n : ℚ) (h q : ℚ) : ℚ :=
  3 * n - 3/2 * h + q - 5/2

def tC (n : ℚ) (h q : ℚ) : ℚ :=
  (-9/4) * n + h - 3/4 * q - 1/4
```

Esimerkki automatisaatiosta

```
lemma corollary_4_2 (n h q : ℚ)
  (htA : tA n h q < 2)
  (htB : tB n h q < 2)
  (htC : tC n h q < 2):
  n <39:= by
rw [tA, tB, tC] at *
linarith
```

Osio 2

Ääriarvojakaumat

Ääriarvojakauma

- Olkoot $X_i : i \in \mathbb{N}$ riippumattomia kertymäfunktion F mukaisesti jakautuneita satunnaismuuttujia.

$$M_n := \max \{X_i : i \leq n\}$$

Ääriarvojakauma

- Olkoot $X_i : i \in \mathbb{N}$ riippumattomia kertymäfunktion F mukaisesti jakautuneita satunnaismuuttujia.

$$M_n := \max\{X_i : i \leq n\}$$

- Mitä tapahtuu, kun $n \to \infty$?

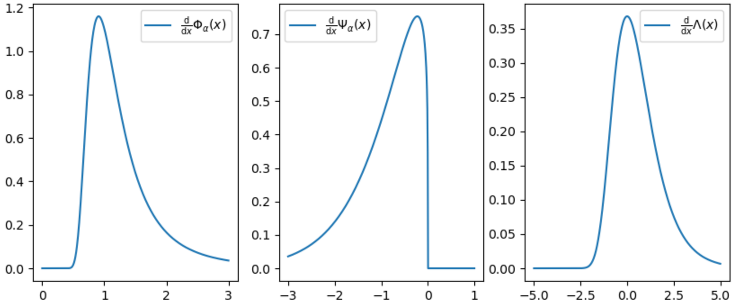
Ääriarvojakauma

- Olkoot $X_i : i \in \mathbb{N}$ riippumattomia kertymäfunktion F mukaisesti jakautuneita satunnaismuuttujia.

$$M_n := \max \{X_i : i \leq n\}$$

- Mitä tapahtuu, kun $n \to \infty$?
- Lisätään sopivat siirto- ja skaalausjonot $a_n, b_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow (1/a_n)M_n - b_n/a_n$ ja $F(a_n x + b_n)^n$ suppenevat.

Ääriarvojakaumien kuvaajat



Kuva: Esimerkit ääriarvojakaumien tiheysfunktioista

Ääriarvojakaumien kertymäfunktiot

$$\Phi_\alpha(x) := \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & \text{muutoin} \end{cases} \quad (\alpha > 0),$$

$$\Psi_\alpha(x) := \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}), & \text{kun } x \leq 0 \\ 1, & \text{muutoin} \end{cases} \quad (\alpha > 0),$$

$$\Lambda(x) := \exp(-e^{-x})$$

Osio 3

Affiinit muunnokset

Reaaliakselin affiini muunnos

- Affiini muunnos koostuu siirrosta ja skaalauksesta
- Reaaliakselin affiinit muunnokset ovat muotoa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$.
- Suunnan säilyttäville affiineille muunnoksille $a > 0$.

Luokittelutulos

Olkoot kaikilla $s, t > 0, A_t(x) = a_t x + b_t, (a_t > 0)$ affiineja muunnoksia, joilla $A_{st} = A_s \circ A_t$ ja a, b mitallisia funktioita.

- On olemassa $\beta \in \mathbb{R}$ jolla $\forall t > 0, x \in \mathbb{R}$:

$$A_t(x) = x + \beta \log t$$

  TAI

- On olemassa $\rho \neq 0$ ja $c \in \mathbb{R}$ joilla kaikilla $t > 0, x \in \mathbb{R}$ pätee

$$A_t(x) = t^\rho (x - c) + c$$

Osio 4

Lähteet

Lähteet ja viittaukset

Tuomas Kelomäki (2025). *Morse matchings and Khovanov homology of 4-strand torus links*, Aalto University.

Osio 5

TODO $[0/2]$

- ☐ Nimi?
- ☐ Lisää kuva siirtodiasta affiinien muunnosten dioihin
- ☐ todo a > 0
- ☐ Muuta lean koodi (1.) tai kerro lisenssi
- ☐ Lisää linkki PDF:ään
- ☐ Laserosoitin?