

# Ääriarvojakaumien luokittelun formalisointi

## Affiinit reaaliakselin muunnokset

Joel Kronqvist

9. kesäkuuta 2026

# Outline

- 1 Linkki kalvoihin
- 2 Formalisointi
- 3 Ääriarvojakaumat
- 4 Affiinit muunnokset
- 5 Lähteet
- 6 **TODO** [0/2]

# Osio 1

Linkki kalvoihin



**Kuva:** Esityksen kalvot ovat saatavilla osoitteesta [cron4.fi/aihe.pdf](https://cron4.fi/aihe.pdf) tai kuvan QR-koodin kautta.

## Osio 2

# Formalisointi

# Mitä on matematiikan tietokoneformalisointi?

- Formaali kieli

```
variable (p q : Prop)
```

```
lemma (h : p ∧ q) : q ∧ p :=  
  have hp : p := h.left  
  have hq : q := h.right  
  show q ∧ p from  
    And.intro hq hp
```

# Mitä on matematiikan tietokoneformalisointi?

- Formaali kieli
- Tyypitarkistin

```
variable (p q : Prop)
```

```
lemma (h : p ∧ q) : q ∧ p :=  
  have hp : p := h.left  
  have hq : q := h.right  
  show q ∧ p from  
    And.intro hq hp
```

# Mitä on matematiikan tietokoneformalisointi?

- Formaali kieli
- Tyypitarkistin
- Tietokone vaatii jokaisen loogisen askeleen

```
variable (p q : Prop)
```

```
lemma (h : p ∧ q) : q ∧ p :=  
  have hp : p := h.left  
  have hq : q := h.right  
  show q ∧ p from  
    And.intro hq hp
```



# Miksi?

Formalisoinnin hyötyjä:

- Tietokone vaatii jokaisen loogisen askeleen

# Miksi?

Formalisoinnin hyötyjä:

- Tietokone vaatii jokaisen loogisen askeleen
- Helpompi tarkastettavuus

# Miksi?

Formalisoinnin hyötyjä:

- Tietokone vaatii jokaisen loogisen askeleen
- Helpompi tarkastettavuus
- Huoleton automatisaatio

# Esimerkki automatisaatiosta

Korollarin 4.2 todistuksesta (Tuomas Kelomäki, 2025).

Oletus:

$$2 > -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}q - 1$$

$$2 > 3n - \frac{3}{2}h + q - \frac{5}{2}$$

$$2 > -\frac{9}{4}n + h - \frac{3}{4}q - \frac{1}{4}.$$

Väite:  $n < 39$ .

# Esimerkki automatisaatiosta

```
import Mathlib.Analysis.Normed.Field.Lemmas
```

```
def tA (n : ℚ) (h q : ℚ) : ℚ :=  
  (-1/2) * n + 1/2 * h - 1/4 * q - 1
```

```
def tB (n : ℚ) (h q : ℚ) : ℚ :=  
  3 * n - 3/2 * h + q - 5/2
```

```
def tC (n : ℚ) (h q : ℚ) : ℚ :=  
  (-9/4) * n + h - 3/4 * q - 1/4
```

# Esimerkki automatisaatiosta

```
lemma corollary_4_2 (n h q :  $\mathbb{Q}$ )  
  (htA : tA n h q < 2)  
  (htB : tB n h q < 2)  
  (htC : tC n h q < 2):  
  n < 39 := by  
rw [tA, tB, tC] at *  
linarith
```

## Osio 3

# Ääriarvojakaumat

# Ääriarvojakauma

- Olkoot  $X_i : i \in \mathbb{N}$  riippumattomia kertymäfunktion  $F$  mukaisesti jakautuneita satunnaismuuttujia.

$$M_n := \max \{X_i : i \leq n\}$$



# Ääriarvojakauma

- Olkoot  $X_i : i \in \mathbb{N}$  riippumattomia kertymäfunktion  $F$  mukaisesti jakautuneita satunnaismuuttujia.

$$M_n := \max \{X_i : i \leq n\}$$

- Mitä tapahtuu, kun  $n \rightarrow \infty$ ?

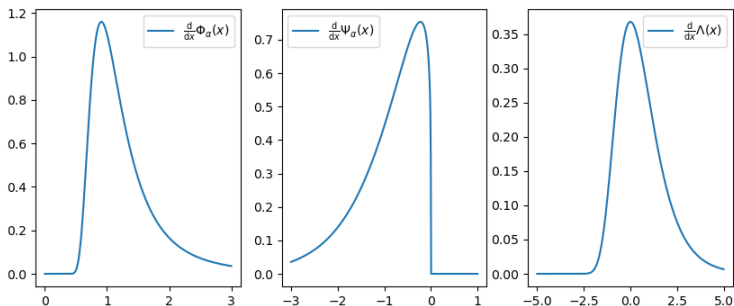
# Ääriarvojakauma

- Olkoot  $X_i : i \in \mathbb{N}$  riippumattomia kertymäfunktion  $F$  mukaisesti jakautuneita satunnaismuuttujia.

$$M_n := \max \{X_i : i \leq n\}$$

- Mitä tapahtuu, kun  $n \rightarrow \infty$ ?
- Lisätään sopivat siirto- ja skaalausjonot  $a_n, b_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\Rightarrow (1/a_n)M_n - b_n/a_n$  ja  $F(a_n x + b_n)^n$  suppenevat.

# Ääriarvojakaumien kuvaajat



Kuva: Esimerkit ääriarvojakaumien tiheysfunktioista

# Ääriarvojakaumien kertymäfunktiot

$$\begin{aligned}\Phi_{\alpha}(x) &:= \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & \text{muutoin} \end{cases} \quad (\alpha > 0), \\ \Psi_{\alpha}(x) &:= \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}), & \text{kun } x \leq 0 \\ 1, & \text{muutoin} \end{cases} \quad (\alpha > 0), \\ \Lambda(x) &:= \exp(-e^{-x})\end{aligned}$$

## Osio 4

# Affiinit muunnokset

# Reaaliakselin affiini muunnos

- Affiini muunnos koostuu siirrosta ja skaalauksesta
- Reaaliakselin affiinit muunnokset ovat muotoa  
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax + b.$
- Suunnan säilyttäville affiineille muunnoksille  $a > 0$ .

# Luokittelutulos

Olkoot kaikilla  $s, t > 0$ ,  $A_t(x) = a_t x + b_t$ , ( $a_t > 0$ ) affiineja muunnoksia, joilla  $A_{st} = A_s \circ A_t$  ja  $a, b$  mitallisia funktioita.

- On olemassa  $\beta \in \mathbb{R}$  jolla  $\forall t > 0, x \in \mathbb{R}$  :

$$A_t(x) = x + \beta \log t$$

TAI

- On olemassa  $\rho \neq 0$  ja  $c \in \mathbb{R}$  joilla kaikilla  $t > 0, x \in \mathbb{R}$  pätee

$$A_t(x) = t^\rho(x - c) + c$$

## Osio 5

### Lähteet



# Lähteet ja viittaukset

Tuomas Kelomäki (2025). *Morse matchings and Khovanov homology of 4-strand torus links*, Aalto University.

## Osio 6

**TODO** [0/2]

- ☐ Nimi?
- ☐ Lisää kuva siirtodiasta affiinien muunnosten dioihin
- ☐ todo  $a > 0$
- ☐ Muuta lean koodi (1.) tai kerro lisenssi
- ☐ Lisää linkki PDF:ään
- ☐ Laserosoitin?