

Ääriarvojakaumien luokittelun formalisointi

Affiinit reaaliakselin muunnokset

Joel Kronqvist

15.6.2026

Sisällys

- 1 Formalisointi
- 2 Ääriarvojakaumat
- 3 Affiinit muunnokset
- 4 Lähteet

Linkki kalvoihin

Kuva: Esityksen kalvot ovat saatavilla osoitteesta cron4.fi/static/aihe.pdf tai kuvan QR-koodin kautta.

Osio 1

Formalisointi

Mitä on matematiikan tietokoneformalisointi?

- Formaali kieli
- Tyypitarkistin
- Curry-Howard
-isomorfismi

```
variable (p q : Prop)
```

```
lemma (h : p  $\wedge$  q) : q  $\wedge$  p :=  
  have hp : p := h.left  
  have hq : q := h.right  
  show q  $\wedge$  p from  
    And.intro hq hp
```

Listaus: Esimerki Lean 4 -koodista
(Jeremy Avigad et al., 2025). Apache
2.0-lisensöity.

Miksi?

Formalisoinnin hyötyjä:

- Tietokone vaatii jokaisen loogisen askeleen
- Helpompi tarkastettavuus
- Huoleton automatisaatio

Esimerkki automatisaatiosta

Korollarin 4.2 todistuksesta (Tuomas Kelomäki, 2025).

Oletus:

$$2 > -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}q - 1$$

$$2 > 3n - \frac{3}{2}h + q - \frac{5}{2}$$

$$2 > -\frac{9}{4}n + h - \frac{3}{4}q - \frac{1}{4}.$$

Väite: $n < 39$.

Esimerkki automatisaatiosta

```
import Mathlib.Analysis.Normed.Field.Lemmas
```

```
def tA (n : ℚ) (h q : ℚ) : ℚ :=  
  (-1/2) * n + 1/2 * h - 1/4 * q - 1
```

```
def tB (n : ℚ) (h q : ℚ) : ℚ :=  
  3 * n - 3/2 * h + q - 5/2
```

```
def tC (n : ℚ) (h q : ℚ) : ℚ :=  
  (-9/4) * n + h - 3/4 * q - 1/4
```

Esimerkki automatisaatiosta

```

lemma corollary_4_2 (n h q :  $\mathbb{Q}$ )
  (htA : tA n h q < 2)
  (htB : tB n h q < 2)
  (htC : tC n h q < 2):
  n < 39 := by
  rw [tA, tB, tC] at *
  linarith
  
```

Osio 2

Ääriarvojakaumat

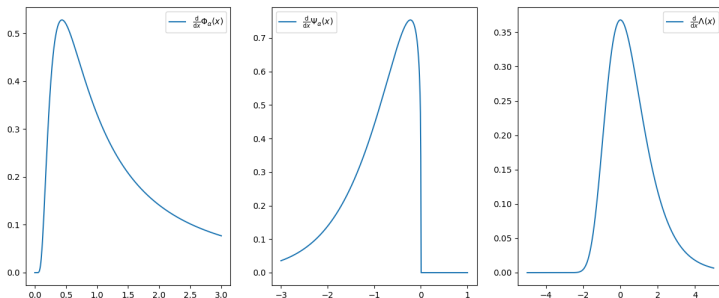
Ääriarvojakauma

- Olkoot $X_i : i \in \mathbb{N}$ riippumattomia kertymäfunktion F mukaisesti jakautuneita satunnaismuuttujia.

$$M_n := \max \{X_i : i \leq n\}$$

- Mitä tapahtuu, kun $n \rightarrow \infty$?
- Lisätään sopivat siirto- ja skaalausjonot $a_n, b_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $\Rightarrow (1/a_n)M_n - b_n/a_n$ ja $F(a_n x + b_n)^n$ suppenevat.

Ääriarvojakaumien kuvaajat



Kuva: Esimerkit ääriarvojakaumien tiheysfunktioista

Ääriarvojakaumien kertymäfunktiot

$$\Phi_\alpha(x) := \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & \text{muutoin} \end{cases} \quad (\alpha > 0),$$

$$\Psi_\alpha(x) := \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha), & \text{kun } x \leq 0 \\ 1, & \text{muutoin} \end{cases} \quad (\alpha > 0),$$

$$\Lambda(x) := \exp(-e^{-x})$$

Osio 3

Affiinit muunnokset

Reaaliakselin affiini muunnos

- Affiini muunnos koostuu siirrosta ja skaalauksesta
- Reaaliakselin affiinit muunnokset ovat muotoa
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax + b.$
- Suunnan säilyttäville affiineille muunnoksille $a > 0$.

Luokittelutulos

Olkoot kaikilla $s, t > 0$, $A_t(x) = a_t x + b_t$, ($a_t > 0$) affiineja muunnoksia, joilla $A_{st} = A_s \circ A_t$ ja a, b mitallisia funktioita.

- On olemassa $\beta \in \mathbb{R}$ jolla $\forall t > 0, x \in \mathbb{R}$:

$$A_t(x) = x + \beta \log t$$

TAI

- On olemassa $\rho \neq 0$ ja $c \in \mathbb{R}$ joilla kaikilla $t > 0, x \in \mathbb{R}$ pätee

$$A_t(x) = t^\rho(x - c) + c$$

Osio 4

Lähteet

Lähteet ja viittaukset

Bingham, N. H. et al. (1987). *Regular Variation*, Cambridge University Press.

Jeremy Avigad et al. (2025). *Theorem Proving in Lean 4*, Github.

Tuomas Kelomäki (2025). *Morse matchings and Khovanov homology of 4-strand torus links*, Aalto University.

Lisätietoa

- Regular variation (Bingham, N. H. et al., 1987).
- Theorem Proving in Lean 4 (Jeremy Avigad et al., 2025)
- joel.kronqvist@aalto.fi